

DETERMINAREA ACCELERAȚIEI GRAVITAȚIONALE PRIN UTILIZAREA PENDULULUI SIMPLU

1. CONSIDERAȚII TEORETICE

O greutate suspendată la capătul unui fir constituie un pendul simplu. Dacă pendulului i se imprimă o mișcare de balans (oscilație) se poate observa că perioada de oscilație este aceeași pentru o lungime dată și nu este influențată de greutatea suspendată sau (în anumite limite) de amplitudinea oscilației. Această proprietate a făcut posibilă aplicarea pendulului simplu în construcția unor instrumente de măsurare a timpului cunoscute sub numele de pendule. Mișcarea de oscilație a pendulului este influențată de gravitație. Prin acțiunea sa, forța gravitațională imprimă corpurilor aflate în cădere liberă o viteză sau accelerație care este aceeași pentru toate corpurile indiferent de greutatea lor. Valoarea accelerației (g) se determină utilizând perioada de oscilație a unui pendul simplu.

2. SCOPUL LUCRĂRII:

- demonstrarea faptului ca perioada de oscilație a unui pendul depinde doar de lungimea lui și nu este influențată de greutate sau amplitudinea oscilației.
- determinarea valorii accelerației gravitaționale utilizând pendulul

3. DESCRIEREA INSTALAȚIEI

- 1 fir cu plumb (EX20)
- 1 cârlig reglabil
- 2 piulițe moletate (P1)
- 1 șurub lung (P3)
- 1 greutate de 1N
- 1 bucată de sfoară (aproximativ 600 mm lungime), cronometru

4. DESFĂȘURAREA LUCRĂRII

Se montează panoul în poziție verticală. Se poziționează cârligul ajustabil (P6) în orificiul (9K) și se asigură cu piulița (P1). Se introduce șurubul (P3) în orificiul (6J) și se asigură cu piulița (P1). Cu ajutorul unui liniar și a unui creion se trasează pe panoul de montaj o linie orizontală care trece prin centrul găurii (9J) și care marchează nivelul de zero.

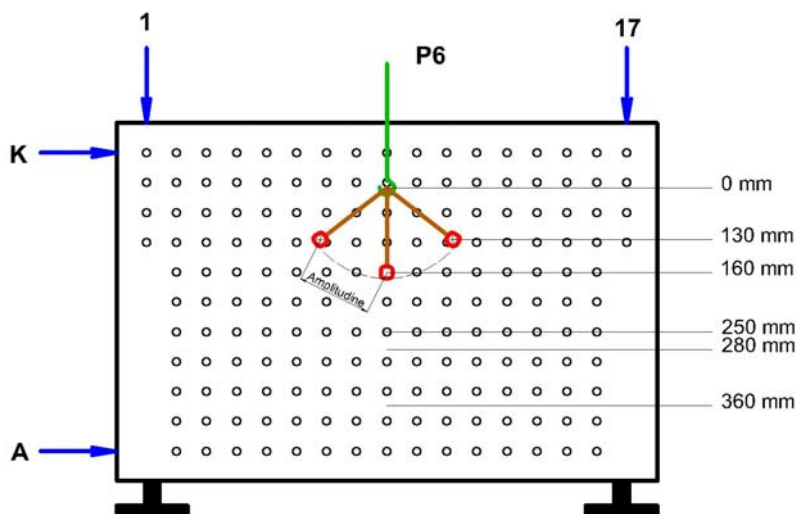


Fig. 1 Schema de realizare a montajului

Se mai trasează încă 5 linii horizontale situate la distanța de 130 mm, 160 mm, 250 mm, 280 mm și 360 mm față de linia care marchează nivelul de zero. (Este important de menționat faptul că găurile de pe panoul de montaj sunt dispuse la o distanță de 50 mm una față de cealaltă). Se întinde sfoara de-a lungul firului cu plumb (aproximativ 600 mm) prin intermediul unui nod care să permită înlăturarea ei după finalizarea experimentului.

Testul 1

Se glisează tija până când cârligul P6 ajunge în poziția de zero (gaura 9J). Sfoara de care este legat plumbul se trece o dată în jurul cârligului iar capătul liber se fixează cu ajutorul șurubului (P3). Plumbul are imprimat un semn care marchează centrul de greutate al acestuia. Pentru *Testul 1* se poziționează acest semn pe linia care marchează nivelul de 160 mm. Astfel, lungimea pendulului va fi în acest caz de 160 mm.

Pendulului i se imprimă o mișcare de oscilație având amplitudinea de aproximativ 50 mm de o parte și de alta a poziției de echilibru. Amplitudinea oscilației se poate verifica ușor ținând cont de dispunerea găurilor pe panoul de montaj. Se măsoară perioada în care pendulul execută 20 de oscilații complete (o oscilație completă reprezintă trecerea plumbului dintr-o poziție de extrem în cealaltă și înapoi în poziția de extrem).

Se repetă experimentul de două sau de trei ori iar în final se ia în considerare valoarea medie. Se repetă apoi experimentul, pentru o amplitudine de 100 mm și adăugând o greutate de 1 N la bobul de plumb. Adăugarea greutății suplimentare va modifica poziția centrului de greutate care va fi situat la baza greutății de 1 N, la punctul de contact dintre plumb și greutate. Se ajustează lungimea sforii astfel încât baza greutății de 1 N să fie pe linia ce indică nivelul de 160 mm. Se înregistrează perioada în care pendulul efectuează 20 de oscilații complete cu amplitudinea de 50 respectiv 100 mm.

Testul 2

Se menține greutatea de 1 N și se ajustează din nou lungimea corzii astfel încât aceasta să ajungă pe linia ce indică nivelul de 250 mm. I se imprimă pendulului o oscilație având amplitudinea de aproximativ 100 mm și se înregistrează perioada în care pendulul efectuează 20 de oscilații complete. Se modifică lungimea pendulului la 360 mm și se determină din nou perioada în care pendulul efectuează 20 de oscilații complete. Înainte de a modifica din nou lungimea pendulului se face un semn pe coarda în punctul în care cârligul este suspendat, iar apoi se modifică din nou lungimea corzii până când semnul ajunge la nivelul marcat cu 130 mm.

Lungimea pendulului va fi acum de 490 mm (360+130 mm). La fel, se determină perioada de oscilație pentru cazul în care pendulul efectuează 20 de oscilații complete și se notează rezultatele obținute. Se modifică din nou lungimea corzii până când semnul de pe coarda ajunge la nivelul marcat pe panou cu 280 mm. Pendulul va avea acum o lungime de 640 mm (360+280 mm). Se măsoară perioada în care pendulul efectuează 20 de oscilații complete la lungimea de 640 mm.

5. INTERPRETAREA REZULTATELOR

Testul 1

În *Tabelul 1* se notează valorile medii ale perioadei de oscilație a pendulului. Deoarece perioada de oscilație a fost măsurată pentru 20 de oscilații complete ale pendulului, se determină perioada corespunzătoare unei singure oscilații, împărțind la 20 valoarea medie a perioadei de oscilație determinată în cadrul experimentului. Valorile determinate experimental se introduc într-un tabel:

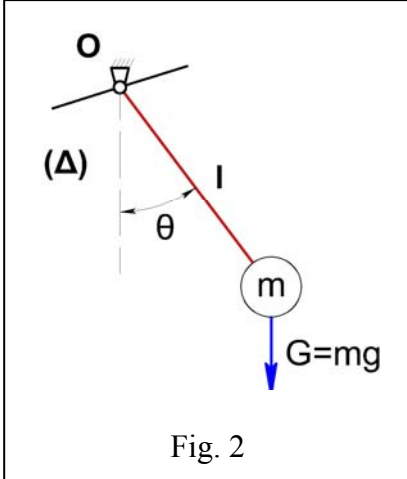
Tabelul 1

Bobul de plumb (A=50mm)	Bobul de plumb (A=100mm)	Bobul de Pb + greutatea de 1N (A=50mm)	Bobul de Pb + greutatea de 1N (A=100mm)
T _{med.} =	T _{med.} =	T _{med.} =	T _{med.} =

Testul 2

Matematic se poate demonstra că perioada de oscilație pentru un pendul de lungime L este:

$$t = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$



Unde g reprezintă accelerația gravitațională. Deoarece π și g sunt constante, rezultă că $T = \text{Constant} \cdot \sqrt{L}$ care reprezintă perioada de oscilație a unui pendul simplu este proporțională cu radical din lungimea pendulului.

Demonstrație:

Un corp punctiform (punct material) de masă m , suspendat într-un punct O prin intermediul unui fir inextensibil, perfect flexibil și de lungime l , scos din echilibru și lăsat să oscileze liber formează un pendul matematic. Mișcarea pendulului matematic reprezintă o rotație în jurul axei (Δ) pentru care se poate aplica *Teorema momentului cinetic*, conform relațiilor de mai jos:

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O \quad (2)$$

Ecuția de mai sus se proiectează pe axa de rotație sub aceeași formă scalară rezultând:

$$\dot{K}_\Delta = M_\Delta \quad (3)$$

Momentul cinetic al punctului material se exprimă cu ajutorul relației de mai jos, astfel:

$$K_\Delta = J_\Delta \cdot \omega = m \cdot l^2 \cdot \omega \quad (4)$$

Momentul forțelor exterioare este dat de momentul greutatei:

$$M_\Delta = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta \quad (5)$$

În relația (3), ω reprezintă viteza unghiulară care, ca și în cazul pendulului fizic se poate determina cu ajutorul relațiilor următoare:

$$\omega = \dot{\theta} ; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (6)$$

Înlocuind relațiile (3) și (4) în (2), ținând cont de relațiile (5) și trecând toți termenii în θ în membrul stâng se obține ecuația diferențială ce descrie mișcarea pendulului matematic:

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = 0 \quad (7)$$

Dacă pendulul execută mici oscilații, adică $\theta \leq 6^\circ$, se pot face următoarele aproximări:

$$\sin\theta \approx \theta ; \quad \cos\theta \approx 1 \quad (8)$$

Înlocuind în ecuația (6) pe $\sin\theta \approx \theta$, se obține o ecuație diferențială omogenă de ordinul doi, care descrie micile oscilații ale pendulului matematic:

$$l \cdot \ddot{\theta} + g \cdot \theta = 0 \quad (9)$$

În expresia (8) se introduce notația: $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, rezultând următoarea ecuație diferențială:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0 \quad (10)$$

Observație: $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ se obține din ecuația fundamentală a dinamicii: $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ ținând cont de faptul că pentru mișcarea circulară, $a = \omega^2 \cdot r$, și de faptul că în cazul de față $r = l$).

Soluția acestei ecuații (reprezintă legea de mișcare a pendulului matematic) este tot o funcție armonică având forma prezentată mai jos:

$$\theta(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0^2 \cdot t + C_2) \quad (11)$$

cu perioada:
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \omega_0 \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12)$$

Analizând Fig. 1, se pot scrie următoarele expresii:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{A}{l}\right)^2} \\ \cos \theta = \frac{l - A}{l} = 1 - \frac{A}{l} \\ \sin \theta = \sqrt{2 \cdot \frac{A}{l} - \frac{A^2}{l^2}} \end{array} \right. \quad (13)$$

Dacă $\alpha < 5^\circ$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{A}{l} - \frac{A^2}{l^2}\right)\right] \quad (14)$$

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{l} - \frac{1}{4} \cdot \frac{A^2}{l^2}\right)} \quad (15)$$

Tabelul 2

Lungimea pendulului L [m]	$\sqrt{L}$ [m ^{1/2}]	Perioada de oscilație [20 de oscilații]	Perioada de oscilație [1 oscilație]
0,16			
0,25			
0,36			
0,49			
0,64			

Pe baza datelor din tabel se trasează graficul de variație a perioadei de oscilație a pendulului T în raport cu $\sqrt{L}$. Graficul obținut trebuie să fie o dreaptă.



Fig.3 Reprezentarea grafică a variației perioadei de oscilație cu lungimea pendulului

Efectuând o serie de transformări în ecuația (1) rezultă că: $g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L}{T^2}$.

Din reprezentarea grafică se alege o valoare pentru L din care se determină L . Tot din grafic se determină valoarea lui T care corespunde lungimii alese iar pe baza lor se calculează valoarea accelerației gravitaționale utilizând relația prezentată mai sus. În final ar trebui să se obțină pentru accelerația gravitațională g o valoare apropiată de $9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$.

6. CONCLUZII

Pe baza rezultatelor experimentale se întocmește un raport care să trateze:

- Modul în care amplitudinea mișcării afectează perioada de oscilație a pendulului.
- Perioada de oscilație a pendulului este influențată în vreun fel de greutatea acestuia?
- Din rezultatele experimentului se poate observa că în cazul în care se mărește de 4 ori lungimea pendulului (ex. De la 160 mm la 640 mm) perioada de oscilație a acestuia se dublează. Analizând graficul obținut explicați cum variaza perioada de oscilație a pendulului cu lungimea sa.

Activitate suplimentară:

Să se calculeze perioada de oscilație (T) pentru un pendul cu lungimea de 1 m. Se consideră că g are valoarea de $9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$.