

DETERMINAREA GRAFICĂ A VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR ÎN MIȘCAREA UNUI MECANISM PLAN

1. Scopul lucrării

Lucrarea are ca scop *determinarea grafică a vitezelor și accelerațiilor* în cazul unui mecanism plan, pe baza teoremelor lui Euler pentru viteze și accelerații.

2. Considerații teoretice

Un solid rigid execută o *mișcare plan-paralelă* dacă trei puncte necoliniare aparținând rigidului rămân permanent într-un plan fix din spațiu, numit *planul mișcării* sau *planul director*. Cele trei puncte ale rigidului definesc un plan numit *plan mobil* materializat prin secțiunea (Σ) .

În figura 1 se consideră un solid rigid (C) care efectuează o mișcare plan-paralelă. Fie $O_1x_1y_1z_1$ un sistem cartezian de referință fix situat în planul mișcării și $Ax'y'z'$, respectiv $Axyz$, două sisteme de referință mobile, având originea într-un punct A aparținând secțiunii (Σ) de intersecție a rigidului cu planul fix (P_f) . Primul sistem are axele permanent paralele cu axele sistemului fix, iar celălalt este invariabil legat de solidul rigid și are axa Az normală pe planul fix (P_f) . Funcțiile care caracterizează mișcarea sistemului de referință mobil $Axyz$, deci și a rigidului, în raport cu sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ sunt :

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad \theta = \theta(t). \quad (1)$$

Rezultă că *solidul rigid în mișcarea plan-paralelă are trei grade de libertate*.

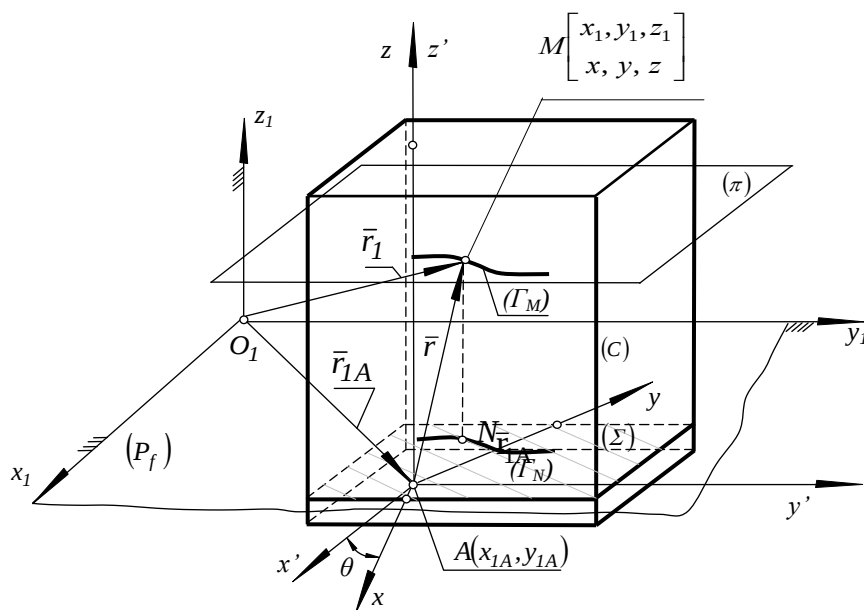


Fig. 1

Fie M un punct material aparținând rigidului (C) . Între coordonatele x_1, y_1, z_1 și x, y, z ale acestui punct înregistrate față de sistemul fix, respectiv cel mobil, solidar cu rigidul, există relația matricială:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & x_{1A} \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & y_{1A} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

din care se obțin *ecuațiile parametrice carteziene ale traiectoriei punctului M* ,

$$x_1 = x_{1A} + x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y_1 = y_{1A} + x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z_1 = z = \text{const.} \quad (3)$$

Din analiza ecuațiilor (3) rezultă că toate punctele situate pe aceeași normală la planul mișcării au traiectorii plane identice situate la cotele z considerate. Punctul N de coordonate $x, y, 0$, aparținând secțiunii mobile are aceeași mișcare ca a punctului M .

Astfel, studiul mișcării solidului rigid se reduce la studiul mișcării secțiunii mobile (Σ) pe suprafața planului fix $O_1x_1y_1$, mișcare complet determinată dacă se cunoaște mișcarea a două puncte aparținând acestei secțiuni. Cum două puncte determină un segment de dreaptă, rezultă că studiul mișcării secțiunii plane (Σ) , deci și a solidului rigid (C) , se reduce la studiul mișcării unui segment de dreaptă aparținând secțiunii (Σ) în planul fix.

Ca *exemple de mișcări plan-paralele* se citează: mișcarea bielei la un mecanism bielă-manivelă, mișcarea unei roți de vehicul pe un drum rectiliniu, mișcarea cardanică a barei drepte, mișcarea mecanismelor cu came și cu roți dințate etc.

3. Tema lucrării

Se consideră mecanismul de pompă din figura 2 (vezi pag. 8) într-o configurație dată de unghiul φ . *Se dau:*

- unghiul $\varphi = 30 + 5n$ [°];
- turația manivelei motoare O_1A , $n_1 = 300 + 10m = \text{const.}$, n fiind **numărul de ordine al studentului din semigrupă și m numărul semigrupe.**
- $O_1A = 30 \text{ cm}$, $O_1O_2 = 60 \text{ cm}$, $O_2B = 60 \text{ cm}$, $AB = 40 \text{ cm}$, $AC = 20 \text{ cm}$, $CD = 40 \text{ cm}$.

Se cere determinarea grafică, pentru configurația mecanismului definită de unghiul φ , a vitezei și accelerației pistonului pompei (punctul D) prin metodele planului vitezelor și planului accelerațiilor.

4. Desfășurarea lucrării

a) Determinarea vitezei $\vec{v}_D$ a pistonului pompei

Viteza pistonului pompei se va determina prin *metoda planului vitezelor*. În acest sens, după determinarea vitezei punctului A aparținând manivelei, se determină succesiv vitezele punctelor B, C, D , scriind relațiile Euler pentru viteze, pentru perechile de puncte care aparțin aceluiași element. Ordinea operațiilor este următoarea:

- se calculează viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{\pi n_1}{30} \quad [\text{rad/s}] \quad (4)$$

- se calculează viteza punctului A ($\bar{v}_A$), aparținând manivelei O_1A .

$$v_A = \omega \cdot O_1A. \quad (5)$$

Vectorul $\bar{v}_A$ are direcție perpendiculară pe O_1A și sensul dat de ω .

- se reprezintă mecanismul la scară pentru configurația dată de unghiul φ .

Se notează cu k_L **coeficientul de scară al lungimilor**, reprezentat de raportul dintre lungimea dată și cea desenată:

$$k_L = \frac{L_{real}(cm)}{L_{desenat}(cm)} = \frac{O_1A}{O_1A_{desenat}}. \quad (6)$$

- se reprezintă viteza punctului A pe planul mecanismului, astfel încât să fie egală cu reprezentarea lungimii (desenate) a manivelei, respectiv:

$$v_{A_{desenat}} = O_1A_{desenat} \quad . \quad (7)$$

Rezultă astfel **coeficientul de scară al vitezelor** k_v :

$$k_v = \frac{v_{real}}{v_{desenat}} = \frac{\omega \cdot O_1A}{O_1A_{desenat}} = \omega \cdot k_L. \quad (8)$$

- se determină viteza punctului B , ținând seama de relațiile:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad \bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_3 \times \overline{AB}. \quad (9)$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2B}.$$

$\bar{v}_A$ este viteză cunoscută, $\bar{v}_{BA} \perp \overline{BA}$, $\bar{v}_B \perp \overline{O_2B}$;

Pentru construcția grafică a planului vitezelor se alege arbitrar un pol o (vezi figura 3, pag. 8). În polul o se reprezintă la scară viteza $\bar{v}_A$. Se notează cu a extremitatea vectorului $\bar{v}_A$. Prin extremitatea a a lui $\bar{v}_A$ se trasează o perpendiculară pe BA , iar prin o se trasează o perpendiculară pe O_2B . Punctul de intersecție al acestor perpendiculare, notat cu b , reprezintă extremitatea vectorului viteză absolută $\bar{v}_B$.

- Pe baza relațiilor următoare, se determină viteza punctului C :

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}, \quad \bar{v}_{CA} = \bar{\omega}_2 \times \overline{AC}, \quad \bar{v}_{CA} \perp \overline{AC}. \quad (10)$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}, \quad \bar{v}_{CB} = \bar{\omega}_3 \times \overline{BC}, \quad \bar{v}_{CB} \perp \overline{BC}. \quad (11)$$

În planul vitezelor prin punctul a se trasează o perpendiculară pe CA , respectiv prin b o perpendiculară pe CB . Aceste perpendiculare se intersectează în punctul c , care reprezintă extremitatea vectorului viteză absolută $\bar{v}_C$.

- Pe baza relațiilor:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC}, \quad \bar{v}_{DC} = \bar{\omega}_4 \times \overline{CD}, \quad \bar{v}_D \perp \overline{CD}. \quad (12)$$

$$\bar{v}_D \parallel \overline{O_1D}. \quad (13)$$

se determină viteza punctului D.

În planul vitezelor, prin punctul c se trasează o perpendiculară pe DC, care intersectează în d paralela dusă prin o la O_1D . Punctul d reprezintă extremitatea vectorului viteză absolută $\bar{v}_D$. Urmărind relațiile (9-13) și figura 3, se închid poligoanele pornind din o spre b, c și d, rezultând vectorii $\bar{v}_{BA}, \bar{v}_B, \bar{v}_{CA}, \bar{v}_{CB}, \bar{v}_C, \bar{v}_{DC}, \bar{v}_D$.

- Se calculează valoarea vitezei pistonului:

$$v_D = k_V \cdot v_{D\text{desenat}}. \quad (14)$$

- Se pot calcula și vitezele unghiulare ale elementelor 2, 3, 4, astfel:

$$\omega_2 = \frac{v_{BO_2}}{BO_2} = \frac{v_B}{BO_2}, \quad \omega_3 = \frac{v_{BA}}{BA} = \frac{v_{CA}}{CA}, \quad \omega_4 = \frac{v_{DC}}{DC}. \quad (15)$$

sau:

$$\omega_2 = \omega \frac{v_{B\text{desenat}}}{BO_{2\text{desenat}}}, \quad \omega_3 = \omega \frac{v_{BA\text{desenat}}}{BA_{\text{desenat}}} = \frac{v_{CA\text{desenat}}}{CA_{\text{desenat}}}, \quad \omega_4 = \omega \frac{v_{DC\text{desenat}}}{DC_{\text{desenat}}}. \quad (16)$$

Sensurile vitezelor unghiulare sunt date de sensul în care vitezele relative de rotație rotesc segmentele la care se referă.

b) Determinarea accelerației $\bar{a}_D$ a pistonului pompei

Accelerația pistonului pompei se va determina prin metoda planului accelerațiilor. În acest sens, după determinarea accelerației absolute $\bar{a}_A$ a punctului A aparținând manivelei O_1A , se determină succesiv accelerațiile punctelor B, C, D, scriind relații Euler pentru accelerații la perechi de puncte care aparțin aceluiași element.

Pașii pentru construirea planului accelerațiilor sunt următorii:

- se calculează accelerația punctului A aparținând manivelei. Deoarece $\varepsilon = 0$,

$$a_A = \omega^2 \cdot O_1A, \quad (17)$$

cu sensul de la A spre O_1 .

- Se reprezintă accelerația punctului A pe planul mecanismului, astfel încât să fie egală cu reprezentarea lungimii manivelei, respectiv:

$$a_{A\text{desenat}} = O_1A_{\text{desenat}}. \quad (18)$$

Rezultă astfel coeficientul de scară al accelerațiilor k_a :

$$k_a = \frac{a_{\text{real}}}{a_{\text{desenat}}} = \frac{\omega^2 \cdot O_1A}{O_1A_{\text{desenat}}} = \omega^2 \cdot k_L \quad (19)$$

- Se determină *acceleerația punctului B* aparținând bielei pe baza relațiilor:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \quad \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^\tau. \quad (20)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^v + \bar{a}_B^\tau. \quad (21)$$

relații în care:

$\bar{a}_A$ este accelerație cunoscută

$\bar{a}_{BA}^v$ are sensul de la B spre A și modulul $a_{BA}^v = \frac{v_{BA}^2}{BA}$, $\bar{a}_{BA}^\tau = \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{AB}$, $\bar{a}_{BA}^\tau \perp \overline{BA}$.

$\bar{a}_B^v$ are sensul de la B spre O_2 și modulul $a_B^v = \frac{v_B^2}{O_2B}$, $\bar{a}_B^\tau = \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{O_2B}$, $\bar{a}_B^\tau \perp \overline{BO_2}$.

Componenta normală a accelerației a_{BA}^v a punctului B în mișcarea relativă față de punctul A se poate obține prin *metoda triunghiului dreptunghic*, direct la scara accelerațiilor (vezi figura 4).

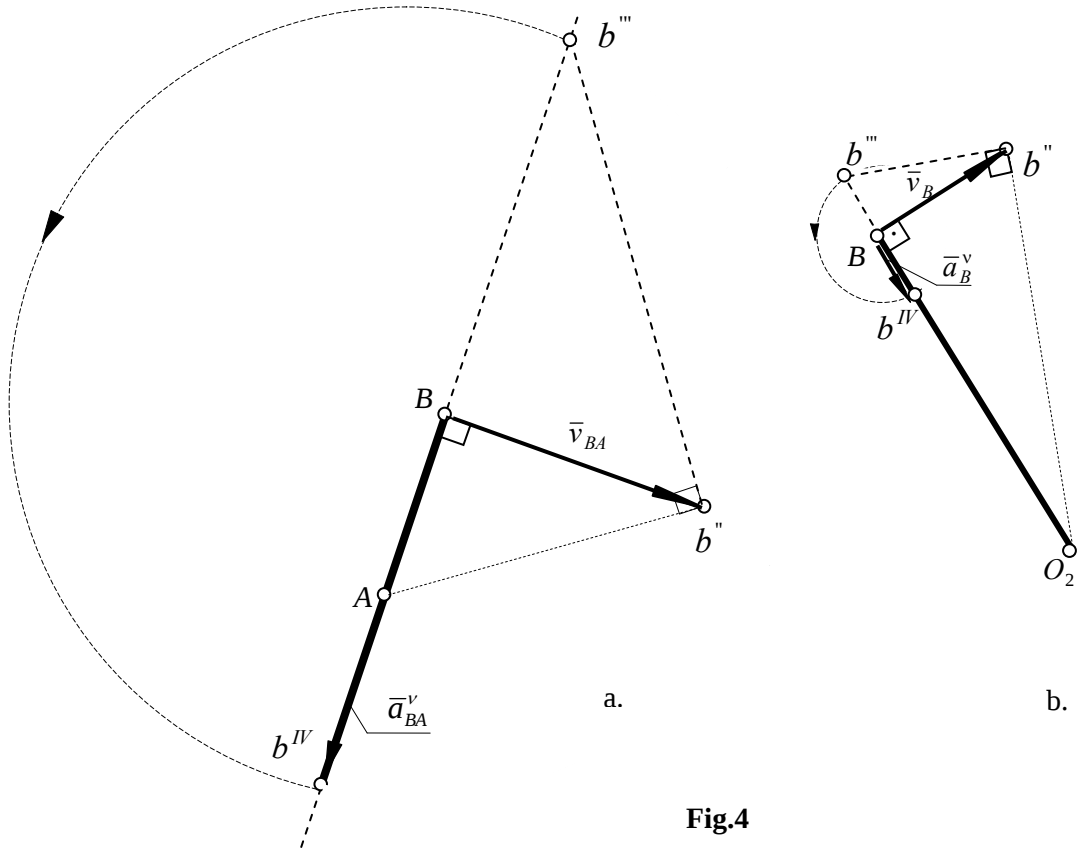


Fig.4

Pe schema mecanismului reprezentat la scară se plasează în B, viteza relativă $\bar{v}_{BA}$ luată din planul vitezelor. Se unește A cu extremitatea b'' a vectorului $\bar{v}_{BA}$. Prin b'' se duce o perpendiculară pe Ab'' care întâlnește direcția AB în b''' . Se rabate cu 180° punctul b''' . Segmentul Bb^{IV} reprezintă la scara accelerațiilor a_{BA}^v . Analog se obține a_B^v .

Pentru a realiza planul accelerațiilor se alege arbitrar un pol o' în care se reprezintă accelerația $\bar{a}_A$ a punctului A. Prin extremitatea a' a vectorului $\bar{a}_A$ se trasează o paralelă la BA, pe care, cu sensul de la B spre A, se desenează la scara accelerațiilor vectorul $\bar{a}_{BA}^v$. Prin extremitatea acestuia se trasează o perpendiculară pe BA. Apoi, prin o' se trasează o paralelă la O_2B , pe care, cu sensul de la B spre O_2 , se desenează la scara accelerațiilor vectorul $\bar{a}_B^v$. Prin extremitatea lui $\bar{a}_B^v$ se duce o perpendiculară pe O_2B , care întâlnește în b' perpendiculara pe BA. Punctul b' astfel obținut, reprezintă extremitatea vectorului accelerație absolută $\bar{a}_B$. Urmărind relațiile (20-21) și figura 5 (vezi pag. 9), se închid poligoanele pornind din o' spre b' obținându-se vectorii: $\bar{a}_{BA}^t, \bar{a}_{BA}, \bar{a}_B^t, \bar{a}_B$.

- Accelerația $\bar{a}_C$ a punctului C aparținând elementului 3 se poate determina pe baza relațiilor:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}, \quad \bar{a}_{CA} = \bar{a}_{CA}^v + \bar{a}_{CA}^t. \quad (22)$$

în care:

- $\bar{a}_A$ este accelerație cunoscută,
- $\bar{a}_{CA}^v$ are sensul de la C spre A și modulul $a_{CA}^v = \frac{v_{CA}^2}{CA}$, $\bar{a}_{CA}^t = \bar{\epsilon}_3 \times \overline{AC}$, $\bar{a}_{CA}^t \perp \overline{CA}$.

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}, \quad \bar{a}_{CB} = \bar{a}_{CB}^v + \bar{a}_{CB}^t. \quad (23)$$

unde:

- $\bar{a}_B$ este accelerație cunoscută,
- $\bar{a}_{CB}^v$ - are sensul de la C spre B și modulul $a_{CB}^v = \frac{v_{CB}^2}{CB}$, $\bar{a}_{CB}^t = \bar{\epsilon}_3 \times \overline{BC}$, $\bar{a}_{CB}^t \perp \overline{CB}$.

Componentele normale ale accelerației a_{CA}^v și a_{CB}^v se determină grafic prin aceeași metodă a triunghiului dreptunghic (vezi figura 4).

Pentru determinarea accelerației $\bar{a}_C$ a punctului C, se trasează prin a' o paralelă la CA, pe care, cu sensul de la C spre A, se desenează vectorul $\bar{a}_{CA}^v$ obținut prin metoda triunghiului dreptunghic. Prin extremitatea acestuia se duce o perpendiculară pe CA. Apoi, prin b' se trasează o paralelă la CB, pe care, cu sensul de la C spre B, se desenează la scara accelerațiilor vectorul $\bar{a}_{CB}^v$. Perpendiculara dusă prin extremitatea acestui vector, întâlnește în c' perpendiculara pe CA amintită mai sus. Punctul c' reprezintă extremitatea vectorului accelerație absolută $\bar{a}_C$.

Urmărind relațiile (22) și (23) și figura 5 (vezi pag. 9), se închid poligoanele pornind din o' spre c' , rezultând vectorii: $\bar{a}_{CA}^t, \bar{a}_{CA}, \bar{a}_{CB}^t, \bar{a}_{CB}, \bar{a}_C$.

- Accelerația punctului D se obține pe baza relațiilor:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}, \quad \bar{a}_{DC} = \bar{a}_{DC}^v + \bar{a}_{DC}^t. \quad (24)$$

$$\bar{a}_D \parallel \overline{O_1D}. \quad (25)$$

în care:

- $\bar{a}_C$ este accelerație cunoscută,

- $\bar{a}_{DC}^v$ are sensul de la D spre C și modulul $a_{DC}^v = \frac{v_{DC}^2}{DC}$, $\bar{a}_{DC}^\tau = \bar{\varepsilon}_4 \times \overline{CD}$, $\bar{a}_{DC}^\tau \perp \overline{DC}$.

Componenta a_{DC}^v se obține grafic prin aceeași metodă a triunghiului dreptunghic.

Pentru determinarea grafică a accelerației $\bar{a}_D$ a pistonului pompei, se procedează astfel:

Prin punctul c' se trasează o paralelă la DC , pe care, cu sensul de la D spre C , se desenează la scara accelerațiilor vectorul $\bar{a}_{DC}^v$. Prin extremitatea acestui vector se duce o perpendiculară pe DC , care întâlnește în d' paralela dusă prin o' la O_1D . Punctul d' reprezintă extremitatea vectorului accelerație absolută $\bar{a}_D$ a pistonului pompei.

Urmărind relațiile (24-25) și figura 5, se închid poligoanele pornind din o' spre d' , rezultând vectorii accelerație: $\bar{a}_{DC}^\tau$, $\bar{a}_{DC}$, $\bar{a}_D$.

Accelerația pistonului pompei se obține transpunând în punctul D din planul mecanismului, vectorul $\bar{a}_D$ din planul de accelerații. Valoarea reală a acestei accelerații va fi:

$$a_D = k_a \cdot a_{D_{desenat}}. \quad (26)$$

• **Accelerațiile unghiulare ale elementelor 2, 3, 4** se pot determina astfel:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{BA}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^\tau}{BC} = \frac{a_B^\tau}{BC}, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{DC}. \quad (27)$$

sau:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_B^\tau}{O_2B} = \omega^2 \frac{a_{B_{desenat}}^\tau}{O_2B_{desenat}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \omega^2 \frac{a_{BA_{desenat}}^\tau}{AB_{desenat}}, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{CD} = \omega^2 \frac{a_{DC_{desenat}}^\tau}{CD_{desenat}}. \quad (28)$$

Accelerațiile a_{BA}^τ , a_B^τ , a_{DC}^τ reprezentate la scară se iau din planul accelerațiilor.

OBSERVAȚII:

- Se observă că figurile formate din puncte ale planului mecanismului sunt asemenea cu figurile formate din punctele omoloage din planul vitezelor respectiv din planul accelerațiilor (*teoremele asemănării ale lui Mehmke: pentru viteze respectiv pentru accelerații*) (de exemplu: $ABC \sim abc$ (fig. 2 și 3) și $ABC \sim a'b'c'$ (fig. 2 și 5)).
- Pentru reprezentarea grafică se va utiliza un format A3;
- Relațiile de calcul necesare construcției grafice (viteze și accelerații) se înregistrează pe coli albe, format A4;
- Se utilizează coeficienții de scară k_L, k_v, k_a , conform relațiilor (6), (8) și (19);
- Se vor construi două desene, unul pentru viteze și altul pentru accelerații, alăturate schiței mecanismului.

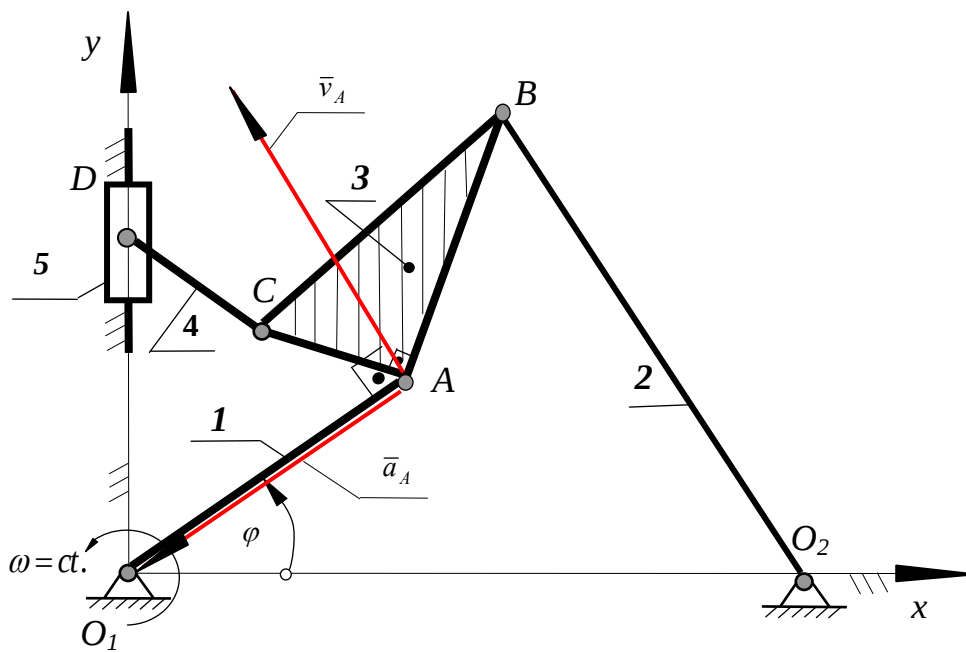


Fig.2

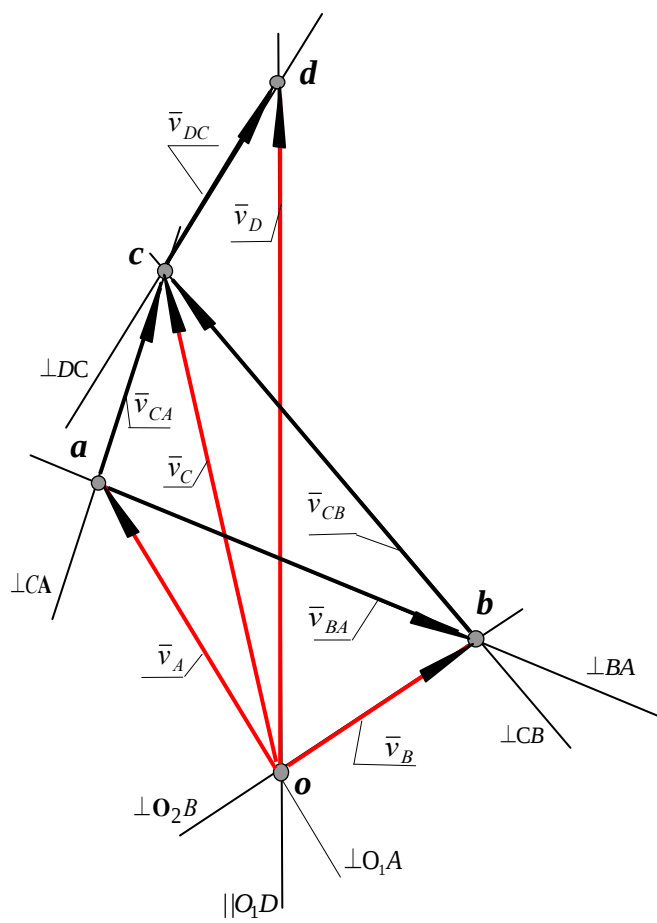


Fig.3

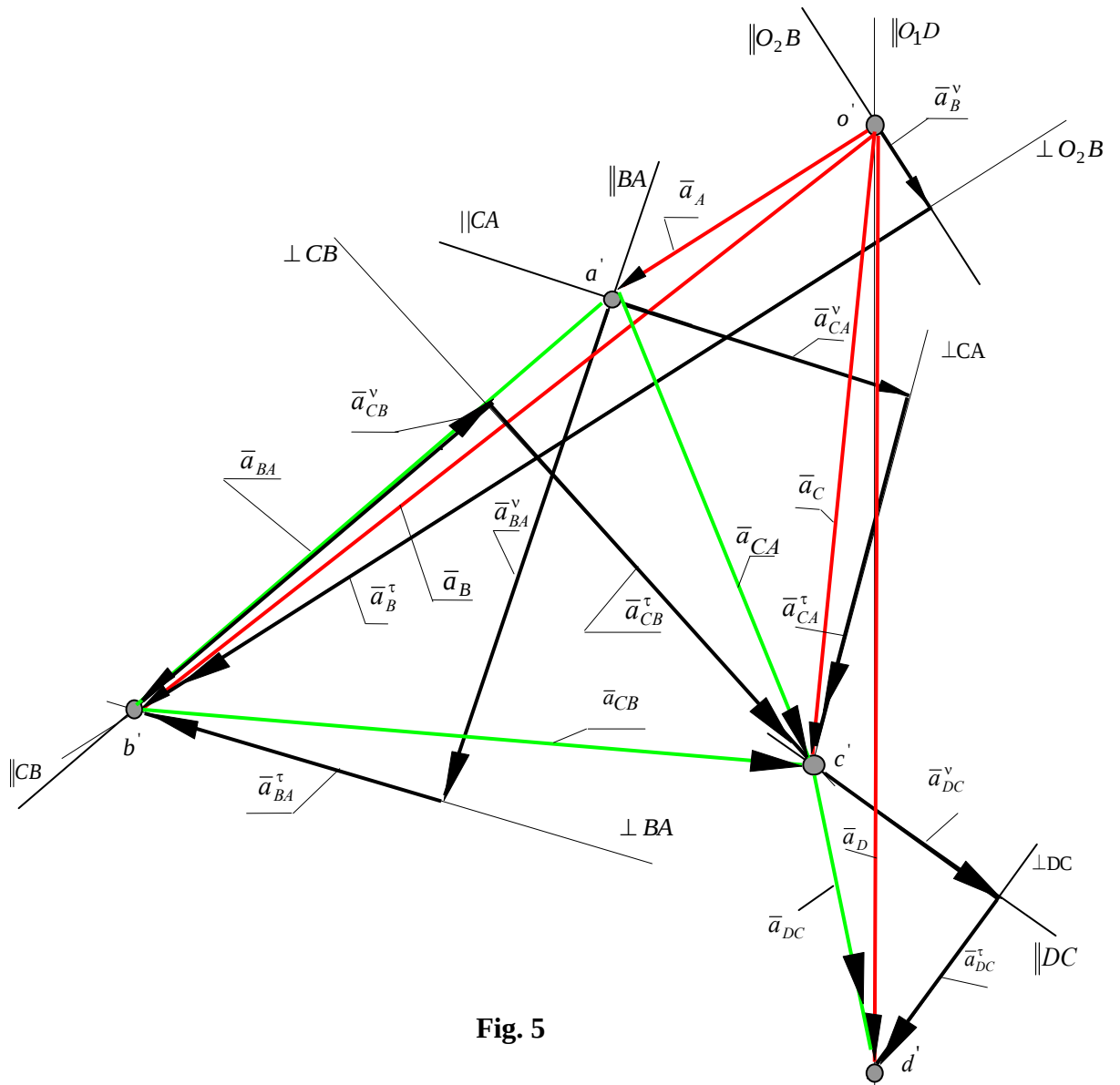


Fig. 5