

DETERMINAREA ANALITICĂ A MOMENTELOR DE INERȚIE AXIALE ȘI POLARE PENTRU O PLACĂ PLANĂ OMOGENĂ

1. Tema lucrării

Să se determine pe cale analitică momentele de inerție axiale și polare (în raport cu polul O și cu centrul de greutate C) pentru placa plană și omogenă din figura 1:

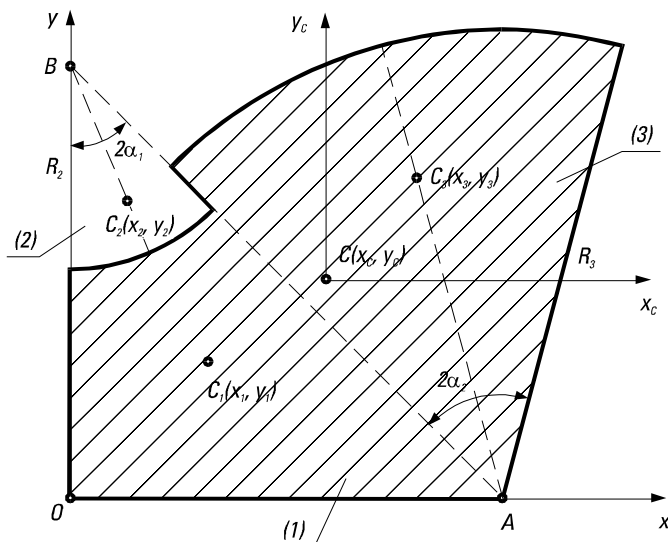


Figura 1

Elemente geometrice:

$$a = 10 + 0,5 n \quad [\text{cm}] \quad (\text{OA} = \text{OB} = a)$$

$$R_2 = 7 + 0,1 n \quad [\text{cm}]$$

$$R_3 = 8 + 0,2 n \quad [\text{cm}]$$

$$2\alpha_2 = 45 \quad [^\circ]$$

$$2\alpha_3 = 40 + n \quad [^\circ]$$

$$\rho_s = 5 + 0,25 n \quad [\text{kg/m}^2]$$

unde n reprezintă numărul de ordine din semigrupă.

$x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_c, y_c; A_1, A_2, A_3$, - determinate în lucrarea anterioară.

2. Considerații teoretice

Momentul de inerție mecanic (planar, axial, polar) al unui sistem material cu p componente de mase m_i :

$$J = \sum_{i=1}^p m_i \delta_i^2$$

unde δ_i reprezintă distanța de la centrul de greutate al componentei i la plan, axă sau punct.

Momentele de inerție axiale (în planul xOy):

$$J_x = \sum_{i=1}^p m_i y_i^2; \quad J_y = \sum_{i=1}^p m_i x_i^2$$

Momentul de inerție polar (în raport cu polul O):

$$J_O = \sum_{i=1}^p m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_x + J_y$$

Variația momentelor de inerție

a) în raport cu axe paralele, figura 2 (formulele lui Steiner)

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta_c} + M d_1^2$$

$$J_{\Delta_2} = J_{\Delta_1} + M(d_2^2 - d_1^2) \text{ -- formula lui Steiner generalizată}$$

b) în raport cu axe concurente

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

În planul xOy ($\beta = \pi/2 - \alpha; \gamma = \pi/2$) relația devine:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \cos \alpha \sin \alpha$$

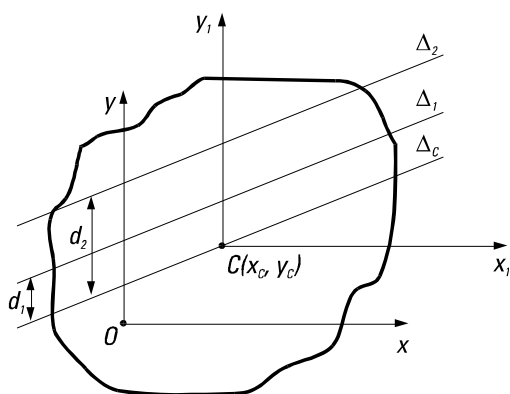


Figura 2

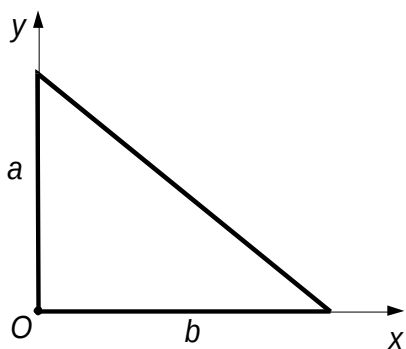


Figura 3

Momentele de inerție pentru triunghi:

$$J_x = \rho \frac{ba^3}{12} = M \frac{a^2}{6}$$

$$J_y = \rho \frac{ab^3}{12} = M \frac{b^2}{6}$$

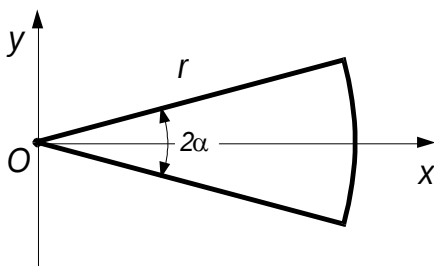


Figura 4

Momentele de inerție pentru sector circular

$$J_x = \frac{1}{4} Mr^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$J_y = \frac{1}{4} Mr^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

3. Desfășurarea lucrării

Placa se va descompune în trei elemente, pentru fiecare dintre ele determinându-se momente de inerție în raport cu axele x și y ale sistemului de referință dat.

Elementul (1):

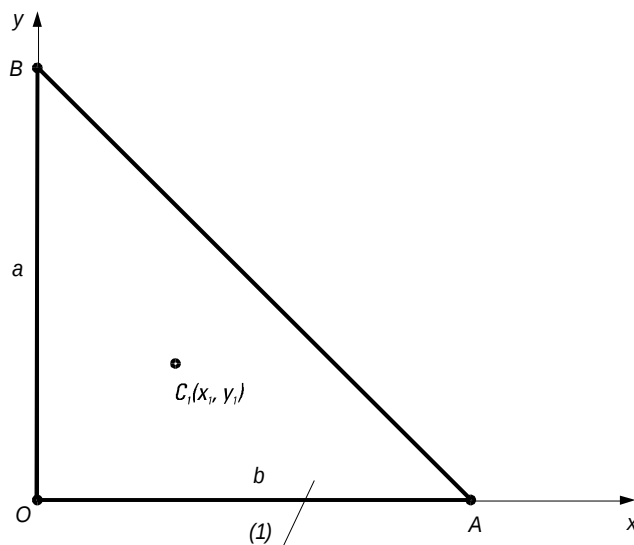


Figura 5. Elementul (1)

$$J_x^{(1)} = \rho_s \frac{ba^3}{12} = M_1 \frac{a^2}{6}; \quad J_y^{(1)} = \rho_s \frac{ab^3}{12} = M_1 \frac{b^2}{6}$$

Elementul (2):

$$J_{x_1}^{(2)} = \frac{1}{4} M_2 R_2^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha_2}{2\alpha_2} \right); \quad J_{y_1}^{(2)} = \frac{1}{4} M_2 R_2^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha_2}{2\alpha_2} \right)$$

$$J_{x'_1}^{(2)} = J_{x_1}^{(2)} \cos^2 \alpha + J_{y_1}^{(2)} \sin^2 \alpha - 2J_{x_1 y_1}^{(2)} \cos \alpha \sin \alpha$$

Axa Bx_1 este axă de simetrie pentru sectorul circular (2), ceea ce înseamnă că este în același timp direcție principală de inerție. Prin urmare, momentul de inerție centrifugal se anulează:

$$J_{x_1'}^{(2)} = J_{x_1}^{(2)} \cos^2 \alpha + J_{y_1}^{(2)} \sin^2 \alpha; \quad J_{y_1'}^{(2)} = J_{x_1}^{(2)} \sin^2 \alpha + J_{y_1}^{(2)} \cos^2 \alpha$$

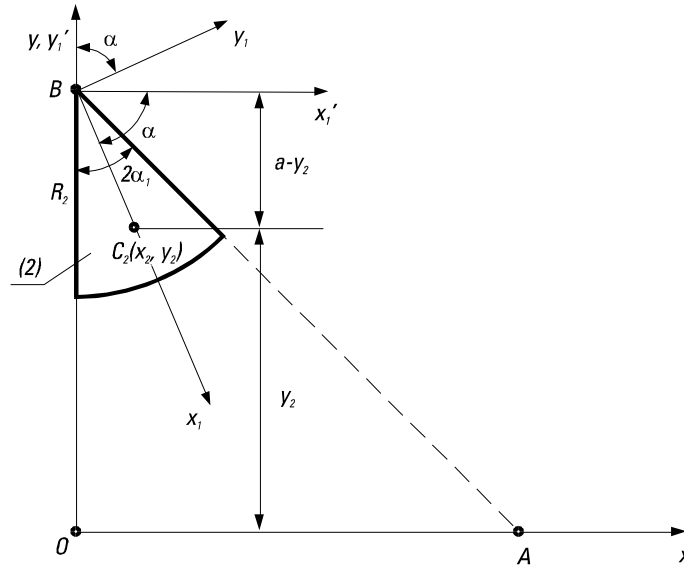


Figura 6. Elementul (2)

Momentele de inerție în raport cu axele x și y sunt:

$$J_x^{(2)} = J_{x_1'}^{(2)} + M_2[y_2^2 - (a - y_2)^2] = J_{x_1'}^{(2)} + M_2a(2y_2 - a)$$

$$J_y^{(2)} = J_{y_1'}^{(2)} = J_{x_1}^{(2)} \sin^2 \alpha + J_{y_1}^{(2)} \cos^2 \alpha$$

Elementul (3):

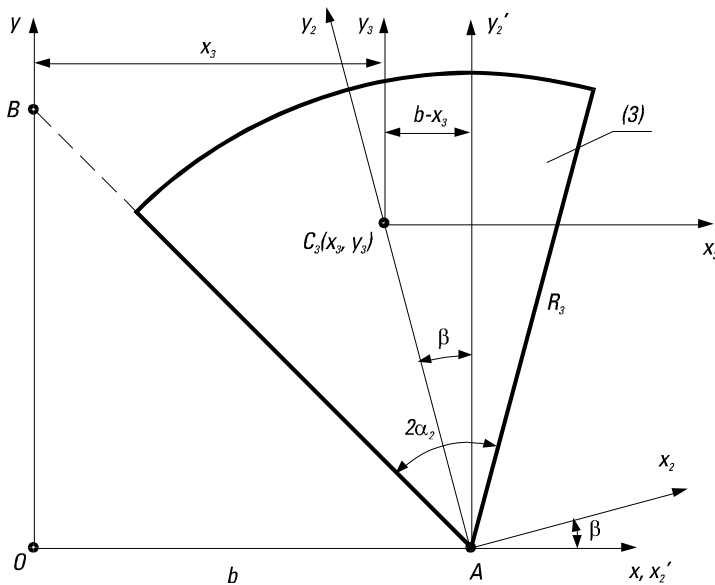


Figura 7. Elementul (3)

$$J_{x_2}^{(3)} = \frac{1}{4} M_3 R_3^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha_3}{2\alpha_3} \right)$$

$$J_{y_2}^{(3)} = \frac{1}{4} M_3 R_3^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha_3}{2\alpha_3} \right)$$

$$J_{x_2'}^{(3)} = J_{x_2}^{(3)} \cos^2 \beta + J_{y_2}^{(3)} \sin^2 \beta$$

$$J_{y_2'}^{(3)} = J_{x_2}^{(3)} \sin^2 \beta + J_{y_2}^{(3)} \cos^2 \beta$$

$$J_x^{(3)} = J_{x_2'}^{(3)} = J_{x_2}^{(3)} \cos^2 \beta + J_{y_2}^{(3)} \sin^2 \beta$$

$$J_y^{(3)} = J_{y_2'}^{(3)} + M_3[x_3^2 - (b - x_3)^2] = J_{y_2'}^{(3)} + M_3b(2x_3 - b)$$

Momentele de inerție axiale ale plăcii compuse:

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)} + J_x^{(3)}; \quad J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)} + J_y^{(3)}$$

Momentul de inerție polar în raport cu polul O:

$$J_O = J_x + J_y$$

Momentul de inerție polar în raport cu centrul de greutate:

$$J_C = J_{x_c} + J_{y_c} = J_x - My_C^2 + J_y - Mx_C^2 = J_O - M(x_C^2 + y_C^2)$$

unde $M = M_1 - M_2 + M_3$ reprezintă masa întregii plăci.

4. Prelucrarea datelor

Se vor realiza calculele analitice pe baza pașilor prezentați mai sus, în funcție de numărul de ordine din semigrupă. Rezultatul calculelor va fi sintetizat în tabelele de mai jos:

Tabelul 1

n	Elementul (1)				Elementul (2)				Elementul (3)			
	x_1	y_1	A_1	M_1	x_2	y_2	A_2	M_2	x_3	y_3	A_3	M_3

Tabelul 2

n	Elementul (1)		Elementul (2)		Elementul (3)		Global			
	$J_x^{(1)}$	$J_y^{(1)}$	$J_x^{(2)}$	$J_y^{(2)}$	$J_x^{(3)}$	$J_y^{(3)}$	J_x	J_y	J_O	J_C

Observație: se vor specifica unitățile de măsură folosite.